МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВПО «ВГТУ», ВГТУ)

Информационных технологий и компьютерной безопасности

(факультет)

Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине Высшая математика

Тема Геометрические критерии устойчивости решения некоторых дифференциальных уравнений

Разработал(а) студент(ка) К.Д.Нитченко

Подпись, дата Инициалы, фамилия

Руководитель Т.А.Надеина\_\_

Подпись, дата Инициалы, фамилия

Члены комиссии \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Подпись, дата Инициалы, фамилия

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Подпись, дата Инициалы, фамилия

Нормоконтролер \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Подпись, дата Инициалы, фамилия

Защищена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Оценка \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

дата

2018

Содержание

[Введение 3](#_Toc532338294)

[1 Теоретическая часть 4](#_Toc532338295)

[1.1Устойчивость по Ляпунову: основные понятия и определения 4](#_Toc532338296)

[1.2Устойчивость решений ДУ по первому приближению 7](#_Toc532338297)

[1.3 Критерии устойчивости Рауса–Гурвица и Михайлова (геометрический критерий устойчивости) 9](#_Toc532338298)

[2.Практическая часть 12](#_Toc532338300)

[Заключение 17](#_Toc532338301)

# Введение

Высшая математика является одним из важнейших элементов в образовании современного человека. Для всякого сколько-нибудь сложного сооружения, будь то машина, мост, здание, самолет, необходим целый ряд расчетов, которые при помощи средств одной лишь элементарной математики выполнить было бы невозможно. И в процессе обучения в высших технических учебных заведениях студентам постоянно приходится пользоваться высшей математикой.

В данной курсовой работе будет рассмотрена тема геометрические критерии устойчивости решения некоторых дифференциальных уравнений. Основной целью дифференциальных уравнений является получение прочных знаний по классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений ,необходимых для успешной работы в области совершенствования навыков работы с компьютерными технологиям. Кроме того, целью освоения этой темы можно считать познания в элементов математической культуры и мышления.

# 1 Теоретическая часть

## 1.1Устойчивость по Ляпунову: основные понятия и определения

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

dxidt=fi(x1,x2,…,xn,t),i=1,2,…,n.dxidt=fi(x1,x2,…,xn,t),i=1,2,…,n.(1)

Решение φi(t), i=1,2,…,nφi(t), i=1,2,…,n, системы (1), удовлетворяющее начальным условиям φi(t0)=φi0,φi(t0)=φi0,i=1,2,…,ni=1,2,…,n, называется устойчивым no Ляпунову при t→∞t→∞, если для любого ε>0ε>0существует δ(ε)>0δ(ε)>0 такое, что для всякого решения xi(t),xi(t),i=1,2,…,ni=1,2,…,n, системы (1), начальные значения которого удовлетворяют условиям:

|xi(t0)−φio|<δ,i=1,2,…,n,(2) имеют место неравенства:

|xi(t)−φi(t)|<ε,i=1,2,…,n,(3) для всех  t⩾t0t⩾t0.

Если при сколь угодно малом δ>0δ>0хотя бы для одного решения xi(t),xi(t),

 i=1,2,…,ni=1,2,…,n, неравенства (3) не выполняются, то решение φi(t)φi(t)

называется неустойчивым. Если, кроме выполнения неравенств (3) при условии (2)

выполняется также условие:

limt→∞|xi(t)−φi(t)|=0,i=1,2,…,n,limt→∞|xi(t)−φi(t)|=0,i=1,2,…,n,(4)

то решение φi(t), i=1,2,…,nφi(t), i=1,2,…,n, называется асимптотически устойчивым.

Если при сколь угодно малом δ>0δ>0хотя бы для одного решения xi(t),xi(t),

i=1,2,…,ni=1,2,…,n, неравенства (3) не выполняются, то решение φi(t)φi(t)

называется неустойчивым.

Если, кроме выполнения неравенств (3) при условии (2) выполняется также условие:

limt→∞|xi(t)−φi(t)|=0,i=1,2,…,n,limt→∞|xi(t)−φi(t)|=0,i=1,2,…,n,(4), то решение

φi(t), i=1,2,…,nφi(t), i=1,2,…,n, называется асимптотически устойчивым.

Исследование на устойчивость решения φi(t),φi(t),i=1,2,…,ni=1,2,…,n, системы (1) можно свести к исследованию на устойчивость нулевого (тривиального) решения xi≡0,xi≡0,i=1,2,…,ni=1,2,…,n, некоторой системы, аналогичной системе (1), dxidt=Fi(x1,x2,…,xn,t),i=1,2,…,n,dxidt=Fi(x1,x2,…,xn,t),i=1,2,…,n,(1'), где

Fi(0,0,…,0,t)≡0. i=1,2,…,nFi(0,0,…,0,t)≡0. i=1,2,…,n.

Говорят, что точка xi=0, i=1,2,…,nxi=0, i=1,2,…,n, есть точка покоя системы (1').

Применительно к точке покоя определения устойчивости и неустойчивости могут быть сформулированы так. Точка покоя xi=0,xi=0,i=1,2,…,ni=1,2,…,n, устойчива по Ляпунову, если, каково бы ни было ε>0ε>0, можно найти такое δ>0δ>0, что для любогорешенияxi(t),xi(t),i=1,2,…,ni=1,2,…,n,начальныеданныекоторого xi0=xi(t0),xi0=xi(t0),i=1,2,…,ni=1,2,…,n, удовлетворят условию:

|xi0<δ,i=1,2,…,n,|xi0<δ,i=1,2,…,n,(2')

выполняются неравенства|xi(t)|<ε,i=1,2,…,n,|xi(t)|<ε,i=1,2,…,n,(3')для всех t⩾t0t⩾t0.

Для случая n=2n=2 геометрически это означает следующее. Каким бы малым ни был радиус εε цилиндра с осью OtOt, в плоскости t=t0t=t0 найдется δ-окрестность точки

(0,0,t0)(0,0,t0) такая, что все интегральные кривые x1=x1(t),x1=x1(t),x2=x2(t)x2=x2(t)

, выходящие из этой окрестности, для всех t⩾t0t⩾t0 будут оставаться внутри этого цилиндра на рис.1.

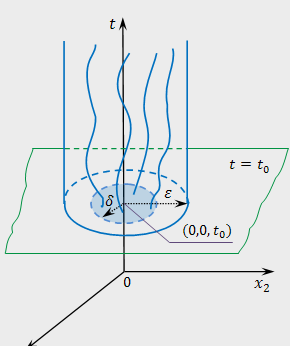


Рисунок-1

Если кроме выполнения неравенств (3), выполняется также условие limt→+∞|xi(t)|=0, i=1,2,…,nlimt→+∞|xi(t)|=0, i=1,2,…,n, то устойчивость асимптотическая.

Точка покоя x1=0, i=1,2,…,nx1=0, i=1,2,…,n, неустойчива, если при сколь угодно малом δ>0δ>0 хотя бы для одного решения xi(t),xi(t),i=1,2,…,ni=1,2,…,n

, условие (3') не выполняется.

## 1.2 Устойчивость решений ДУ по первому приближению

Пусть

dxidt=fi(x1,x2,…,xn),i=1,2,…,n,dxidt=fi(x1,x2,…,xn),i=1,2,…,n,(1)ипустьxi≡0, i=1,2,…,nxi≡0, i=1,2,…,n,есть точка покоя системы (1), т.е. fi(0,0,…,0)=0fi(0,0,…,0)=0i=1,2,…,ni=1,2,…,n. Будем предполагать, что функции fi(x1,x2,…,xn)fi(x1,x2,…,xn)дифференцируемы в начале координат достаточное число раз.

Разложим функции fi по формуле Тейлора по fi(x1,x2,…,xn)=∑j=1naijxj+Ri(x1,x2,…,xn),

 в окрестности начала координат:

fi(x1,x2,…,xn)=∑j=1naijxj+Ri(x1,x2,…,xn),fi(x1,x2,…,xn)=∑j=1naijxj+Ri(x1,x2,…,xn),здесь  aij=∂fi(0,0,…,0)∂xjaij=∂fi(0,0,…,0)∂xj, а RiRi — члены второго порядка малости относительно x1,x2,…,xnx1,x2,…,xn. — члены второго порядка малости относительно x1,x2,…,xnx1,x2,…,xn.

Тогда исходная система (1) запишется так:

dxidt=∑j=1naijxj+Ri(x1,x2,…,xn),i=1,2,\ldot,n.dxidt=∑j=1naijxj+Ri(x1,x2,…,xn),i=1,2,\ldot,n.(2)

Вместо системы (2) рассмотрим систему

dxidt=∑j=1naijxj,i=1,2,\ldot,n,aij=const,dxidt=∑j=1naijxj,i=1,2,\ldot,n,aij=const,(3)

называемую системой уравнений первого приближения для системы (1).

Справедливы следующие предложения.

1. Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение xi≡0,xi≡0,имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение xi≡0,xi≡0,i=1,2,…,ni=1,2,…,n, системы (3) исистемы(2) асимптотическиустойчивы.  
2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения (4) имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение системы (3) и системы (2) неустойчиво.

Говорят, что в случаях 1 и 2 возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

В критических случаях, когда вещественные части всех корней характеристического уравнения (4) неположительны, причем вещественная часть хотя бы одного корня равна нулю, исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (начинают влиять нелинейные члены Ri).

## 1.3 Критерии устойчивости Рауса–Гурвица и Михайлова (геометрический критерий устойчивости)

Пусть имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами:

a0y(n)+a1y(n−1)+…+any=0(a0,a1,…,an=const, a0>0).a0y(n)+a1y(n−1)+…+any=0(a0,a1,…,an=const, a0>0).(1)

Нулевое решение y≡0y≡0 уравнения (1) асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения

f(λ)≡a0λn+a1λn−1+…+an=0f(λ)≡a0λn+a1λn−1+…+an=0(2)имеют отрицательные вещественные части.

Критерий Рауса—Гурвица. Для того чтобы все корни уравнения (2) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

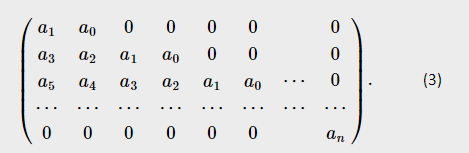


Рисунок-2

Матрица Гурвица составляется так. По главной диагонали выписываются коэффициенты многочлена (2), начиная с a1 и оканчивая an. Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, причем в число последних включается коэффициент a0. Все остальные элементы матрицы, отвечающие коэффициентам с индексами, большими n или меньшими 0, полагаются равными нулю. Главные диагональные миноры матрицы Гурвица имеют вид:

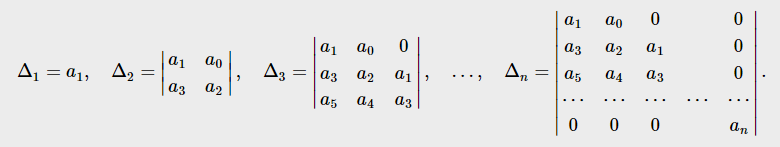


Рисунок-3

Таким образом, условие Гурвица гласит: для устойчивости решения

y≡0y≡0 уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

Δ1>0,Δ2>0,…,Δn>0.Δ1>0,Δ2>0,…,Δn>0.(4)

Так как Δn=anΔn−1Δn, то условие Δn>0 может быть заменено требованием an>0.

Геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова)

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными вещественными коэффициентамиa0y(n)+a1y(n−1)+…+any=0.a0y(n)+a1y(n−1)+…+any=0.(1)

Егохарактеристическоеуравнениеf(λ)≡a0λn+a1λn−1+…+an=0.f(λ)≡a0λn+a1λn−1+…+an=0.(2)

Критерий Михайлова позволяет решить вопрос о расположении корней характеристического уравнения (2) на комплексной плоскости и, следовательно, решить вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1). Полагая λ=iωλ=iω, получаем:

f(iω)=u(ω)+iv(ω),f(iω)=u(ω)+iv(ω),гдеu(ω)=an−an−2ω2+an−4ω4−…,v(ω)=an−1ω−an−3ω3+…

Величину f(iω) при заданном значении параметра ωω можно изобразить в виде вектора на комплексной плоскости Ouv с началом в начале координат.

При изменении ωв интервале (−∞,+∞) конец этого вектора опишет некоторую кривую — так называемую кривую Михайлова (рис. 4). Так как функция u(ω)четная, то кривая Михайлова симметрична относительно оси O и поэтому достаточно строить часть кривой, отвечающую изменению параметра ω от0до +∞.

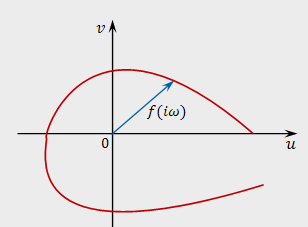


Рисунок-4

Если многочлен f(λ)f(λ) степени n имеет m корней с положительной вещественной частью и n−m корней с отрицательной, то угол φ поворота вектора f (iω) при изменении ω от 0 до +∞ равен φ=(n−2m)π2φ.

Ясно, что для устойчивости решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы m=0.

Критерий Михайлова. Для устойчивости нулевого y≡0

 решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

1) вектор f(iω) при изменении ω от 0 до +∞совершил поворот на угол φ=nπ2φ

, т.е. сделал n4 оборотов против часовой стрелки;

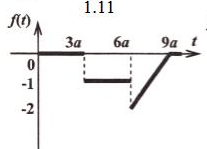
2) годограф f(iω)при изменении ω от 0до +∞ не проходил через начало (0;0).

Отсюда следует, что для устойчивости решения уравнения (1) необходимо, чтобы все корни уравнений u(ω)=0,v(ω)=0были вещественными и перемежающимися друг с другом, т.е. между любыми двумя корнями данного уравнения должен находиться корень другого уравнения.

# 2 Практическая часть

Вариант №11

1. Найти изображение функции, заданной графически:



Решение:

2. Найти оригинал по заданному изображению. Ответ записать в действительной форме

3. Операционным методом решить дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях

4. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом

# Заключение

В ходе выполнении курсовой работы я получила опыт работы со статистическими данными, их обработки и анализа, приобрела умения интерпретировать полученные результаты и совершенствование навыков работы с компьютерными технологиями.